TRANSFORMACIONES ORTOGONALES DE R^n QUE TRANSFORMAN UN SUBESPACIO EN OTRO.

BUSCAMOS f MEDIANTE ARGUMENTOS GEOMÉTRICOS.

Se quiere encontrar una T.O. f que transforme un subespacio en otro subespacio y para ello buscamos la descripción geométrica de la transformación f.

- **R^2**

Se quiere encontrar una T.O. f que transforme la recta $r_1 = L(\mathbf{v_1})$ en la recta $r_2 = L(\mathbf{v_2})$.

Para ello buscamos una descripción geométrica de la transformación f:

- Si queremos una rotación hemos de determinar el ángulo α y el sentido del giro
- Si queremos una simetría hemos de determinar el eje E de la simetría.

	f es una rotación de ángulo a	**f es una simetría de eje E**
$f(r_1) = r_2$	$\lvert\alpha\rvert = \text{ang}(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2})$ signo(α)=signo(det[$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$])	E=L($\mathbf{u}$) es la bisectriz entre r_1 y r_2, Tal que $\mathbf{u} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$, con $\lVert \mathbf{v_1} \rVert = \lVert \mathbf{v_2} \rVert$

La expresión matricial se construye, por el método habitual, a partir de dichos datos.

- **R^3**

Se quiere encontrar una T.O. f que transforme un subespacio dado en otro. Como subespacios consideramos:

✓ las rectas $r_1 = L(\mathbf{v_1})$ y $r_2 = L(\mathbf{v_2})$.
✓ los planos S_1 y S_2 , cuyos vectores normales son $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$.

Para ello buscamos una descripción geométrica de la transformación f:

- Si queremos una rotación hemos de determinar el ángulo α , el eje de rotación E y dar una orientación al mismo.
- Si queremos una simetría hemos de determinar Π (plano de la simetría).

	$f(r_1) = r_2$	**$f(S_1) = S_2$**
f es una rotación **de ángulo a eje E orientado según u**	E=L($\mathbf{u}$), con $\mathbf{u}=\mathbf{v_1}\wedge\mathbf{v_2}$ $\lvert\alpha\rvert = \text{ang}(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2})$ signo(α)=signo(det[$\mathbf{u},\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$])	E= $S_1 \cap S_2$, (se elige $\mathbf{u}\in$ E, que podría ser $\mathbf{u}=\mathbf{n_1}\wedge\mathbf{n_2}$) $\lvert\alpha\rvert = \text{ang}(\mathbf{n_1},\mathbf{n_2})$ signo(α)=signo(det[$\mathbf{u}, \mathbf{n_1},\mathbf{n_2}$])
f es una simetría respecto de un plano P	Π (plano bisectriz entre r_1 y r_2) su vector normal será tal que $\mathbf{n_P} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$, con $\lVert \mathbf{v_1} \rVert = \lVert \mathbf{v_2} \rVert$	Π (plano bisectriz de S_1 y S_2) su vector normal será tal que $\mathbf{n_P} = \mathbf{n_1} + \mathbf{n_2}$, con $\lVert \mathbf{n_1} \rVert = \lVert \mathbf{n_2} \rVert$

La expresión matricial se construye, por el método habitual, a partir de dichos datos.

BUSCAMOS f MEDIANTE ARGUMENTOS ANALÍTICOS.

Nos basamos en que una T.O. transforma una base ortonormal B_1 en otra base ortonormal B_2.

- **R^2**

Se quiere encontrar una T.O. f que transforme la recta r_1 en la recta r_2 .

Por ello, elegimos bases ortonormales de R^2, $B_1=[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$ y $B_2=[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$, tales que:

	f es una rotación (T.O. directa)	**f es una simetría (T.O. inverssa)**
f (r_1) = r_2	$\mathbf{u_1} \in r_1$ y $\mathbf{v_1} \in r_2$ B_1 y B_2 con *igual* orientación	$\mathbf{u_1} \in r_1$ y $\mathbf{v_1} \in r_2$ B_1 y B_2 con *distinta* orientación

Para que f que transforme la recta r_1 en la recta r_2 : imponemos que f ($\mathbf{u_1}$) = $\mathbf{v_1}$.
Para que f sea T.O. : imponemos que transforme B_1 en B_2, es decir f ($\mathbf{u_2}$) = $\mathbf{v_2}$.
De esas condiciones se obtiene la expresión matricial de f respecto de B_1 y B_c: $M X_{B_1} = Y_{B_c}$, donde las columnas de M son las coordenadas de $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ respecto de B_c.
Luego se hace el cambio de base de la expresión matricial de f a B_c. A partir de ella se pueden obtener, por los métodos habituales, el ángulo de la rotación o el eje de simetría.

- **R^3**

Se quiere encontrar una T.O. f que transforme la recta r_1 en la recta r_2 o bien el plano S_1 en el plano S_2 (sus vectores normales son $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$ respectivamente).

Por ello, elegiremos bases ortonormales de R^3, $B_1=[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}]$ y $B_2=[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}]$, adecuadas para cada situación:

	f (r_1) = r_2	**f (S_1) = S_2**
Rotación **de ángulo a eje E orientado según u**	$\mathbf{u_1} \in r_1$ y $\mathbf{v_1} \in r_2$ B_1 y B_2 con igual orientación	$\mathbf{u_1} = \mathbf{n_1}$ y $\mathbf{v_1} = \mathbf{n_2}$ B_1 y B_2 con igual orientación
Simetría respecto de un plano P	$\mathbf{u_1} \in r_1$ y $\mathbf{v_1} \in r_2$ $\mathbf{u_2}=\mathbf{v_2}=\mathbf{u_1} \wedge \mathbf{v_1}$ B_1 y B_2 con distinta orientación	$\mathbf{u_1} = \mathbf{n_1}$ y $\mathbf{v_1} = \mathbf{n_2}$ $\mathbf{u_2}=\mathbf{v_2}=\mathbf{u_1} \wedge \mathbf{v_1}$ B_1 y B_2 con distinta orientación

De forma análoga a lo visto en R^2 , se obtiene la expresión matricial de f respecto de B_1 y B_c, imponiendo que

$$f(\mathbf{u_1}) = \mathbf{v_1}\,,\ f(\mathbf{u_2}) = \mathbf{v_2}\,,\ f(\mathbf{u_3}) = \mathbf{v_3}\,.$$

La matriz respecto de B_c se calcula utilizando el cambio de base. A partir de ella se pueden obtener, por los métodos habituales, el ángulo, el eje de rotación o el plano de simetría.

USO DE DERIVE (III)

En los siguientes ejemplos se muestra cómo puede utilizarse DERIVE para resolver algunos problemas relacionados con aplicaciones lineales y transformaciones ortogonales.

Ejemplo 1:

Nos piden hallar una rotación de $\mathbb{R}^3$ que transforme el plano $S_1 \equiv -5x+4y+3z=0\}_{B_c}$ en el plano $S_2 \equiv x+y=0\}_{B_c}$.

Buscamos la **descripción de f mediante un razonamiento geométrico**:

- ✓ El eje de rotación E es $S_1 \cap S_2 \equiv \left.\begin{matrix} -5x+4y+3z=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\}_{B_c}$. Una forma de hallar un generador de E es calcular el producto vectorial de los vectores normales de cada plano: $\mathbf{u}=\mathbf{n_1}\wedge\mathbf{n_2}$:

```
#1:    n1 := [-5, 4, 3]
#2:    n2 := [1, 1, 0]
#3:    u := CROSS(n1, n2)
#4:                                        [-3, 3, -9]
```

Luego E=L((-3,3,-9)).

- ✓ El ángulo viene dado por $|\alpha| = \text{ang}(\mathbf{n_1},\mathbf{n_2})$ y su signo por la orientación de $[\mathbf{u}, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}]$. Estudiamos el signo:

```
#5:                                  DET([u, n1, n2]) = 99
```

Como es positivo, definimos α como:

$$\#6: \quad \alpha := \text{ACOS}\left(\frac{n1 \cdot n2}{|n1|\cdot|n2|}\right)$$

$$\#7: \quad \pi - 2\cdot\text{ATAN}\left(\frac{3\cdot\sqrt{11}}{11}\right)$$

De esta forma nos da igual que el ángulo sea de los "conocidos", pues utilizaremos la letra α cuando lo necesitemos.

(Si α hubiera sido negativo lo hubiéramos definido $\alpha := -a\cos\left(\dfrac{n1.n2}{\text{abs}(n1)\,\text{abs}(n2)}\right)$.)

Por tanto, ya tenemos una descripción geométrica de la rotación buscada: es la rotación de ángulo α y eje E=L((-3,3,-9)) orientado según **u**=(-3,3,-9).

Ahora hemos de **hallar su expresión matricial**. Damos los siguientes pasos:

- ✓ Construimos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, de orientación positiva, a partir del vector del eje E, **u**=(-3,3,-9):

  i) Elegimos "a ojo" un vector **v** que sea ortogonal a **u**, por ejemplo:

#8: v := [1, 1, 0]

ii) Para obtener un tercer vector **w**, ortogonal a ambos, lo definimos como el producto vectorial de ellos (así aseguramos que la orientación es positiva):

#9: w := CROSS(u, v)

#10: [9, -9, -6]

La base ortonormal buscada será:

#11: $B := \left[\dfrac{u}{|u|}, \dfrac{v}{|v|}, \dfrac{w}{|w|}\right]$

✓ La matriz de la rotación f respecto de la base B es:

#12: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & -\mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & \mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix}$

#13: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{3\cdot\sqrt{11}}{10} \\ 0 & \dfrac{3\cdot\sqrt{11}}{10} & -\dfrac{1}{10} \end{bmatrix}$

(Si no tenemos DERIVE, como conocemos cos(α) y el signo de α, se puede calcular sen(α) "a mano" utilizando que $\cos^2(\alpha)+\mathrm{sen}^2(\alpha)=1$.)

✓ Hacemos el cambio a B_c.

Si tenemos $M_B\ X_B = Y_B$, hemos de sustituir X_B e Y_B por su expresión de cambio de base con B_c : $\mathbf{v}_B = P^{-1}\ \mathbf{v}_{B_C}$, siendo P la matriz cuyas columnas son las coordenadas en B_c de los vectores de la base B. Nos queda: $M_B\ P^{-1}\ X_{B_C} = P^{-1}\ Y_{B_C}$, y de ahí $P\ M_B\ P^{-1}\ X_{B_C} = Y_{B_C}$. Hacemos las cuentas con DERIVE:

#14: P := B\`

(Obsérvese que se ha añadido al final el símbolo de la traspuesta para que las coordenadas de los vectores aparezcan como columnas.)

Para hallar la expresión matricial respecto de B_c, calculamos:

#15: $m := P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & -\mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & \mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$

#16: $\begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

Verificamos que es T.O. directa (y por tanto rotación):

#17: $m` \cdot m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

#18: DET(m) = 1

Verificamos que transforma S_1 en S_2 (pues transforma el vector normal de S_1 en un vector normal de S_2):

#19: m · n1 = [5, 5, 0]

Por tanto, f (S_1) ≡ 5x+5y=0 ≡ S_2.

También podemos **hallar sus vectores fijos**:

#20: SOLUTIONS(m · [x, y, z] = [x, y, z], [x, y, z]) = [[@1, -@1, 3·@1]]

y comprobamos que son la recta L((1,-1,3)), que coincide con el eje E=L((-3,3,-9)).

Ejemplo 2:

Nos piden hallar una simetría g de R^2 que transforme la recta r_1=L((1,1)) en la recta r_2=L((1,0)).

Buscamos la **descripción de la simetría mediante un razonamiento geométrico**, hallando la bisectriz entre ambas rectas.

Para ello hemos de elegir un vector de cada recta de forma que ambos tengan la misma norma, por ejemplo que sean unitarios:

#21: $v1 := \frac{[1, 1]}{|[1, 1]|}$

#22: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

#23: v2 := [1, 0]

La bisectriz está en la dirección de **u= v_1 + v_2** :

#24: u := v1 + v2

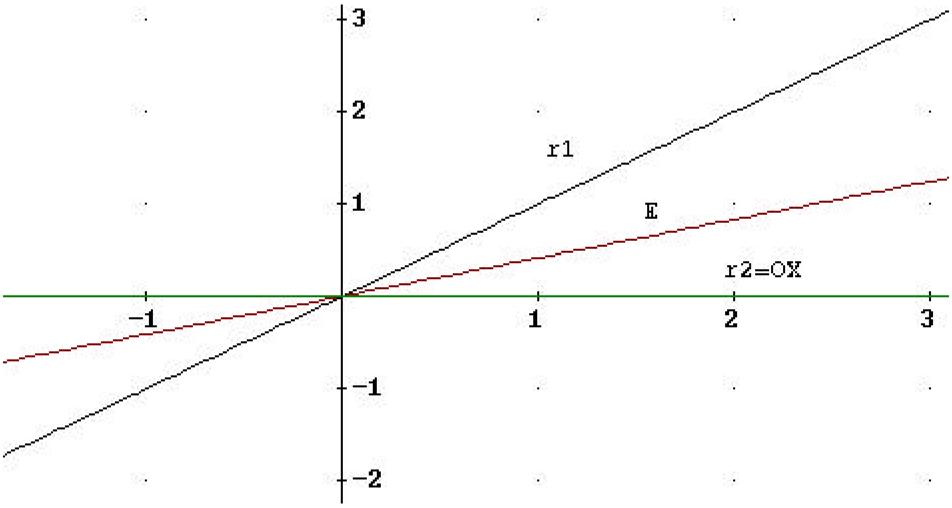
#25: $$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Podemos comprobar que en efecto es así, representando gráficamente las rectas (las escribimos en paramétricas, y elegimos como rango para los parámetros min:-10, máx:10):

#26: r1 := [a, a]

#27: r2 := [a, 0]

#28: $$E := \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\cdot a,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right]$$



Para **hallar la expresión matricial de una simetría de eje E**:

✓ Elegimos una base B=[**u**,**v**], tal que **u**∈ E y **v**∈ $E^{\perp}$. Para determinar **v** basta cambiar de orden las coordenadas de **u** y cambiar el signo a una de ellas:

#29: $$v := \left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right]$$

#30: B := [u, v]

✓ La expresión matricial de la simetría respecto de la base B tiene como matriz a:

#31: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ Para hacer el cambio a B_c, consideramos la matriz de cambio entre B y B_c, que es la formada por los vectores de B en columnas:

#32: P := B\`

$$\#33: \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 \end{bmatrix}$$

Y obtenemos la expresión matricial de la simetría respecto de B_c calculando:

$$\#34: \quad m := P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$\#35: \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Podemos **verificar que es T.O. inversa** (y por tanto una simetría):

$$\#36: \quad m \cdot m` = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#37: DET(m) = −1

Y hallando su vectores fijos comprobamos que el **eje de simetría** es la recta $E=L(\mathbf{u})=L\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$:

#38: SOLUTIONS(m · [x, y] = [x, y], [x, y]) = [[@4, @4·(√2 − 1)]]

$$\#39: \quad \mathrm{RANK}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = 1$$

(También se puede comprobar gráficamente viendo que al representar el resultado obtenido en #38 obtenemos la misma recta E.)

Por el **método analítico** (ver página 2):

i) Elegiremos bases ortonormales de R^2, $B_1=[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$ y $B_2=[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$, tales que:

- ✓ $\mathbf{u_1} \in r_1$ y $\mathbf{v_1} \in r_2$ (si f $(\mathbf{u_1}) = \mathbf{v_1}$ **,** nos aseguramos que f $(r_1) = r_2$).
- ✓ B_1 y B_2 con distinta orientación (si f transforma B_1 en B_2 y tienen distinta orientación nos aseguramos que f sea una T.O. inversa, y por tanto una simetría).

#1: $\left(u1 := \frac{[1, 1]}{|[1, 1]|}\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

#2: $u2 := \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

#3: B1 := [u1, u2]

#4: DET([u1, u2]) = 1

#5: v1 := [1, 0]

#6: v2 := [0, -1]

#7: B2 := [v1, v2]

#8: DET([v1, v2]) = -1

ii) Hallamos la expresión matricial de f respecto de B_1 y B_c : $M_1 \; X_{B_1} = Y_{B_c}$, donde las columnas de M_1 son las imágenes de los elementos de la base B_1 en coordenadas respecto de B_c. Como queremos que f $(r_1)=r_2$, tenemos que f $(\mathbf{u_1}) = \mathbf{v_1}$, y para que B_1 se transforme en B_2 hacemos que f $(\mathbf{u_2}) = \mathbf{v_2}$. Por tanto, las columnas de M_1 son los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$:

#9: m1 := [v1, v2]\`

#10: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

iii) Hacemos el cambio de base a B_c. Para ello sustituimos X_{B_1} por su expresión de cambio de base con B_c : $X_{B_1} = P^{-1} \, X_{\mathbf{B_c}}$, donde P es la matriz cuyas columnas son los vectores de B_1.

#11: P := [u1, u2]\`

Tenemos que la expresión matricial de f respecto de B_c viene dada por $M_1 \; P^{-1} \, X_{\mathbf{B_c}} = Y_{B_c}$.

#12: $m := m1 \cdot P^{-1}$

#13: $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Que es la misma que hemos obtenido por el método geométrico.

Ejemplo 3:

Nos piden hallar una simetría de R^3 que transforme la recta r_1=L((-5,4,3)) en la recta r_2=L((1,1,0)).

Buscamos su **descripción mediante un razonamiento geométrico**:

Para ello hemos de elegir un vector de cada recta de forma que ambos tengan la misma norma, por ejemplo que sean unitarios:

$$\#66: \quad v1 := \frac{[-5, 4, 3]}{|[-5, 4, 3]|}$$

$$\#67: \quad v2 := \frac{[1, 1, 0]}{|[1, 1, 0]|}$$

La suma de dichos vectores nos dará un vector que es normal al "plano bisectriz" entre ambas rectas:

$$\#68: \quad n := v1 + v2$$

$$\#69: \quad \left[0, \frac{9\cdot\sqrt{2}}{10}, \frac{3\cdot\sqrt{2}}{10}\right]$$

Su ecuación implícita respecto de B_c vendrá dada por:

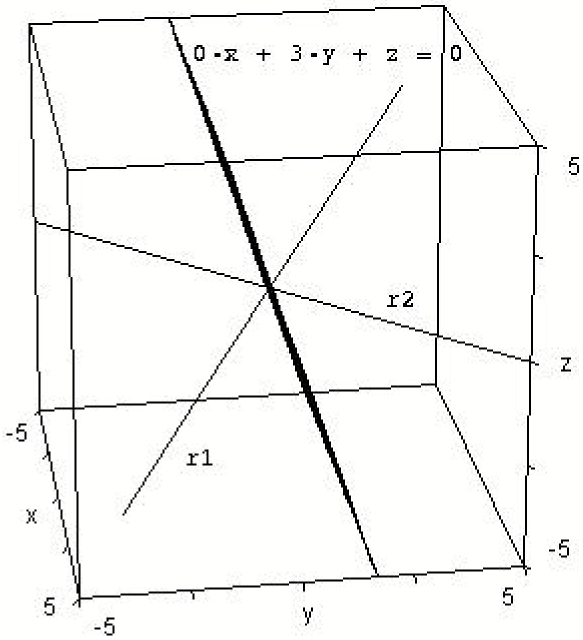
$$\#70: \quad n \cdot [x, y, z] = 0$$

$$\#71: \quad \frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot y}{10} + \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot z}{10} = 0$$

Se puede simplificar "a ojo" (dividiendo por $\frac{3\sqrt{2}}{10}$), o bien utilizar la opción Resolver:

$$\#72: \quad \text{SOLVE}\left(\left[\frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot y}{10} + \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot z}{10} = 0\right], [x, y, z]\right) = [3\cdot y + z = 0]$$

Si representamos gráficamente el plano $\Pi \equiv 3y+z=0$ (y giramos la representación gráfica) observamos que, en efecto está en la bisectriz de ambas rectas (y por tanto son simétricas respecto de Π):



Ahora hemos de hallar la **expresión matricial de la simetría** respecto del plano $\Pi \equiv 3y+z=0$:
i) Elegimos B=[**u**,**v**,**w**] tal que **u**, **v** $\in \Pi$ y **w** $\in \Pi^{\perp}$:

#73: u := [1, 0, 0]

#74: v := [0, 1, -3]

#75: w := CROSS(u, v)

#76: B := [u, v, w]

(También podíamos haber elegido **w** =**n** (vector normal del plano de simetría).)

ii) La expresión matricial de la simetría respecto de B es:

$$\#77: \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

iii) Hacemos el cambio a B_c:

#78: P := B`

$$\#79: \quad m := P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$\#80: \quad m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que corresponde a una T.O. inversa (M^t M=I, det(M)=-1) y como la matriz m es simétrica (y no es – I), corresponde a una simetría.

Para **verificar que el plano de simetría es el plano P** , hallamos sus vectores fijos:

#83: SOLUTIONS(m · [x, y, z] = [x, y, z], [x, y, z]) = [[@1, @2, - 3·@2]]

$$\#84: \quad \mathrm{DET} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -3 & z \end{bmatrix} = 0$$

$$\#85: \quad 3 \cdot y + z = 0$$

Luego la matriz hallada corresponde a la simetría respecto del plano $\Pi \equiv 3y+z=0$.

Podemos **verificar que f (r_1)=r_2** :

#86: m · [-5, 4, 3] = [-5, -5, 0]

Luego f (r_1) = L (f ([-5,4,3])) = L ([-5,-5, 0]) = r_2 .